

FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Halla la fracción irreducible de cada una de las siguientes:

$$a) \frac{5x^2-15x}{10x^3+15x^2} =$$

$$c) \frac{6-x-x^2}{x^2+2x-8} =$$

$$b) \frac{2x-4}{x^2-4x+4} =$$

$$d) \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-6x^2+2x+12} =$$

2. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado final en la fracción irreducible:

$$a) \frac{5x}{x+3} + \frac{3}{x-2} =$$

$$f) \frac{x^2-6x+5}{x^2+5x+6} \cdot \frac{2x^2-8}{x^2-x} \div \frac{2x-10}{x^2+3x} =$$

$$b) \frac{2x-1}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} =$$

$$g) x - \frac{1}{x} \div \frac{x-1}{x} =$$

$$c) \frac{7x}{x-3} - \frac{5}{x+3} + \frac{6x}{x^2-9} =$$

$$h) x + \frac{x}{x-1} \div x - \frac{x}{x-1} =$$

$$d) \frac{2x-6}{x^2-1} \cdot \frac{5x+5}{4x-12} =$$

$$i) \frac{x}{3} - \frac{3}{x} \cdot \frac{x^3+9x}{x-3} =$$

$$e) \frac{x-1}{2x+6} \div \frac{x^2-1}{-3x-9} =$$

$$j) \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} =$$

ECUACIONES LINEALES Y DE SEGUNDO GRADO

3 Resuelve las siguientes ecuaciones, indicando el número de soluciones en cada caso:

$$1) \frac{x-2}{2} - \frac{x+4}{6} = \frac{x}{3} - 1$$

$$6) \frac{2(x+1)}{5} - \frac{x+5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{x+2}{6} - \frac{4-x}{15}$$

$$2) 3x^2 + 5x = 0$$

$$7) \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{2} = 1 - \frac{(x+1)^2}{4}$$

$$3) \frac{x(x+1)}{2} = \frac{-(x-1)^2}{8}$$

$$8) (2x-1)(x-3) = 0$$

$$4) (x-2)^2 + x = (x-1)^2 - (x-2) \cdot (x-1) + 1$$

$$9) \frac{(x+2)^2}{2} - \frac{x^2-5}{4} = 2x + 1$$

$$5) 4x^2 - 100 = 0$$

$$10) \frac{(x-3) \cdot (x+2)}{6} - \frac{(2-x) \cdot (2+x)}{2} = \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{3} - \frac{5(x-2)}{4} + \frac{(x+2)^2}{3} + \frac{1}{6}$$

$$11) 9x^2 = 0$$

$$14) \frac{(x-3)^2}{10} - \frac{3(2-x)}{5} = \frac{1}{4} - \frac{x^2-15}{10} + \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{5}$$

$$12) \frac{(3x-1) \cdot (x+2)}{6} + \frac{x(x+1)}{2} = \frac{2(x+1)^2}{3} - \frac{x}{6}$$

$$13) 3x^2 - 20 = 7$$

$$15) (x-2)(x+2) - 74 = 5x - (2x+3)(x+1)$$

$$16) \frac{(x-3)(2x-1)}{3} - \frac{2(x+4)}{9} = \frac{x}{2} - \frac{2(x+1)^2}{3}$$

$$17) \frac{(x+3)(x+2)}{6} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$20) (x-3) \cdot (x-1) = 8$$

$$18) 15x - 4 = (x-2)(x+2)$$

$$21) 2x^2 + 18 = 0$$

$$19) (x-3) \cdot (x-1) = 0$$

$$22) \frac{2(x-4)}{5} - \frac{(x-1)^2}{3} = \frac{(x-1)(x+1)}{10} - \frac{(x+1)^2}{2}$$

$$23) x^2 - 6x = 0$$

24) $x(x - 6) = 0$

25) $x(x - 6) = -9$

26) $5x^2 = 0$

$3(x - 1)^2 - 1 = 2(x + 1) + x$

4. Sigue resolviendo:

a) $2x(x + 3) = 3(x - 1)$

f) $x + \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = x^2 - 2$

b) $(x + 2)(x - 2) = 2(x + 5) + 21$

g) $\frac{3(x^2-11)}{5} - \frac{2(x^2-60)}{7} = 36$

c) $(x - 1)(x + 1) + (x - 2)^2 = 3$

d) $2x + 3(x - 4)^2 = 37 + (x - 3)(x + 3)$ h) $(3x - 1)(3x + 1) + \frac{(x-2)^2}{2} = 1 - 2x$

e) $\frac{(x+1)(x-3)}{2} + x = \frac{x}{4}$

ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

5. Encuentra todas las soluciones de las siguientes ecuaciones, a partir de la factorización:

a) $x^3 - 7x - 6 = 0$

e) $x^5 - 16x = 0$

b) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$

f) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

g) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$

d) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$

h) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas, usando el cambio de variable:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

e) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

f) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

ECUACIONES RACIONALES

7. Encuentra todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x+2}{x+1} - \frac{3}{4} = 2$

d) $1 - \frac{x}{x+4} = \frac{1}{x-5}$

g) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$

b) $x + 1 = \frac{6}{x}$

e) $x - \frac{x^2+5}{2x+1} = 5$

h) $\frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$

c) $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2$

f) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$

i) $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$

ECUACIONES IRRACIONALES

8. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales (recuerda que en este tipo de ecuaciones es obligatorio efectuar la comprobación):

k) $\sqrt{5x+6} = 3 + 2x$

o) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$

l) $x + \sqrt{7-3x} = 1$

p) $\sqrt{\frac{7x+1}{4}} = \frac{5x-7}{6}$

m) $\sqrt{2-5x} + x\sqrt{3} = 0$

q) $\sqrt{x-1} = \sqrt{6x-5} + \sqrt{2x-9}$

n) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-5} = 0$

r) $\sqrt{2x-1} + 5 = 2\sqrt{x+3} + 2$

s) $2x + 1 + \sqrt{x^2 - x - 3} = 0$

SISTEMAS NO LINEALES

9. Encuentra todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones concluyendo una interpretación geométrica de los mismos :

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} (x + y)(x - y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\sqrt{x + 1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \sqrt{3(x + y)} + x = 12 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + 2 = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

ECUACIONES Y SISTEMAS EXPONENCIALES

10. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales: i) reducción a potencias de igual base; ii) Cambio de variable.

a) $128^{x+1} = 2^{x^2 - x - 2}$

f) $6^{1-x} + 6^x = 7$

b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7$

g) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$

c) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

h) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

d) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

i) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

e) $5^{x+1} = 10 + 3 \cdot 5^{2-x}$

j) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 1$

11. Halla las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales:

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^{x+1} + 3^y = 35 \\ 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -34 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 24 \\ 2^{x+y} = 128 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 \cdot 2^{x+y} = 80 \\ 9^x = 3^{y-1} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$

ECUACIONES Y SISTEMAS LOGARÍTMICOS

12. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas aplicando la definición de logaritmo y las propiedades:

a) $\log x = 1 + \log(22 - x)$

d) $\frac{\log(5+x^2)}{\log(2-x)} = 2$

b) $\log(3x - 1) - \log(2x + 3) = -\log 25 + 1$

e) $(x^2 - 5x + 9)\log 2 + \log 125 = 3$

c) $2\log(5x + 4) - \log 4 = \log(x + 4)$

f) $\log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}$

g) $\log \sqrt{3x + 5} = 1 - \log \sqrt{x}$

h) $\log(x - 3) + \log(x + 1) = \log 3 + \log(x - 1)$

13. Halla las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2\log x - 2\log y = 1 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x^{2y}) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log x - \log y = 3\log 5 \\ \log x^3 + \log y^2 = \log 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2\text{LOG}x - 3\text{LOG}y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$

14. Indica sin resolver si los siguientes sistemas de ecuaciones son o no compatibles y en caso afirmativo indica el número de soluciones, dando además una interpretación geométrica de los mismos:

a) $\begin{cases} 3x = 2y - 7 \\ 6x + 14 = -4y \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 5x = 20y + 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3 + 4y \\ 5x - 20y = 15 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -6x - 9y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -6x + 9y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x = 2y - 7 \\ 6x + 7 = 4y \end{cases}$

INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES (1ER GRADO) CON UNA INCÓGNITA

15. Encuentra el conjunto de soluciones de las siguientes inecuaciones:

(a) $3(x - 2) - 5 \leq 5(x - 1) + 4$

(d) $\frac{3x}{8} > \frac{3x-9}{2} - \frac{2x-8}{3}$

(b) $\frac{2x+3}{3} - x > \frac{2-x}{2}$

(e) $3(x - 1) - 2(x + 3) \geq 5x - 7$

(c) $\frac{x-5}{4} < \frac{x-3}{3}$

(f) $\frac{3(x-2)}{4} - \frac{x}{2} \geq 2 - x$

16. Halla todas las soluciones de los siguientes sistemas:

(g) $\begin{cases} 3x + 2 \leq 10 \\ x - 5 > 1 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 2x - 5 \geq 6 \\ 3x + 1 \leq 15 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

(l) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

INECUACIONES DE 2º GRADO

17. Encuentra el conjunto de soluciones de las siguientes inecuaciones no lineales:

(m) $x^2 - 10x \leq 0$

(p) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

(n) $2x^2 - 12x + 18 \leq 0$

(q) $(x + 1) \cdot x^2 \cdot (x - 3) > 0$

(o) $x(x - 3) \leq x^2 + 5x + 2$

(r) $x(x^2 + 3) < 0$

PROBLEMAS

18. Un inversor que dispone de 28 000 € coloca parte en un banco al 8% y el resto en otro al 6%. Si la primera parte le produce 200 € más que la segunda, ¿qué cantidad colocó en cada banco?

19. Un granjero espera obtener 36 € por la venta de huevos. En el camino al mercado se le rompen cuatro docenas. Para conservar el beneficio decide aumentar en 0,45 € el precio de la docena. ¿Cuántas docenas tenía al principio?

20. Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 hg por defectuosas y vende el resto por 147 €, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra. ¿Cuántos kg tenía la partida inicial?

21. Varios amigos toman un refresco en una terraza y deben pagar 6 € por el total de consumiciones. Como dos dicen no llevar dinero, los demás deben aumentar su aportación en 0,80 € cada uno. ¿Cuánto amigos componían la reunión?

22. Para cubrir el suelo de una habitación, se disponen de dos tipos de baldosas: 3x4 (dm) y 2x5 (dm). Eligiendo las de 3x4, se necesitarían 40 baldosas menos que en el caso de utilizar las de 2x5. ¿Cuál es la superficie de la habitación?

23. Marta quiere construir un marco de un espejo con un listón de madera de 2 metros, sin que le sobre ni le falte. Sabiendo que el espejo es rectangular y con una superficie de $24dm^2$, ¿cuáles serán las longitudes de los lados del marco?

24. En cierta heladería, por una copa de la casa, dos horchatas y cuatro batidos te cobran 34 € un día. Otro día, por 4 copas de la casa y 4 horchatas cobran 44 €; y, un tercer día, te piden 26 € por una horchata y cuatro batidos. Si los precios no han cambiado entre el primer pedido y el último, ¿tienes motivos para pensar que alguno de los tres días te han presentado una cuenta incorrecta?

25. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2000 €. Si el nº de billetes de 10 € es el doble que el de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.

26. Dos amigos invierten 20 000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%. Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1050 € y el segundo de 950 €.

27. Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6384 €. El precio original era de 12 €, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el nº de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se les aplicó el 30% de descuento.

28. Un especulador adquiere 3 objetos de arte por un precio total de 2 millones de €. Al venderlos espera obtener unas ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, con lo que su beneficio total sería de 600 000 €. Pero la fluctuaciones del mercado de las obras de arte revalorizan los tres productos que acaba de adquirir y consigue con la venta ganancias del 80%, del 90% y del 85%, respectivamente, lo que le proporciona un beneficio total de 1,7 millones de €. ¿Cuánto pagó él por cada objeto?

29. Nuestro proveedor de pilas nos cobra por una pequeña, dos medianas y una grande 305 pta. En otra ocasión, por dos pequeñas, tres medianas y dos grandes 540 pta.

(a) ¿Cuánto nos costarán 5 pequeñas, 9 medianas y 5 grandes?

(b) ¿Cuál es el precio de una pila mediana?

(c) ¿Cuánto vale una pequeña más una grande?

(d) ¿Podemos calcular el precio de una pila pequeña?

(e) Si añadimos la condición de que una grande vale el doble que una pequeña, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos de pilas?

30. Lewis Carroll, autor de "Alicia en el País de las Maravillas" propone un problema que puede enunciarse así: el consumo en una cafetería de un vaso de limonada, tres sandwiches y siete bizcochos ha costado 1 chelín y 2 peniques; mientras que un vaso de limonada, cuatro sandwiches y diez bizcochos valen 1 chelín y 5 peniques. Hallar el precio de :

(a) Un vaso de limonada, un sandwich y un bizcocho.

(b) Dos vasos de limonada, tres sandwiches y cinco bizcochos.

Recuerda que un chelín equivale a 12 peniques.